

Relación 1. Matrices y Sistemas de Ecuaciones Lineales

Sugerencias y soluciones

UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO



1. Calcula, por el método de Gauss-Jordan, la matriz inversa de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} F_2 \rightarrow \tilde{F}_2 - 4F_1 \\ F_3 \rightarrow \tilde{F}_3 - 7F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -11 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) F_3 \rightarrow \tilde{F}_3 - 2F_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} F_2 \rightarrow \tilde{F}_2 - 2F_3 \\ F_1 \rightarrow \tilde{F}_1 - 3F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) F_1 \rightarrow \tilde{F}_1 - 2F_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

2. Calcula la forma canónica de Hermite de las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -9 & 10 & 2 & 9 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & 8 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución. La forma de Hermite de la primera matriz es

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La segunda matriz tiene como forma de Hermite la matriz identidad I_5 .

3. Resuelve por el método de eliminación de Gauss–Jordan los sistemas:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 & = & -2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 & = & 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 & = & -8 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{lcl} 2x - 3y & = & 8 \\ 4x - 5y + z & = & 15 \\ 2x & + & 4z = 1 \end{array} \right.$$

Solución. Los dos sistemas son compatibles determinados con soluciones únicas $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1, x_4 = 2$ y $x = 17/2, y = 3, z = -4$. Pueden resolverse fácilmente por el método de Gauss–Jordan.

4. Sean $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & -6 \\ -3 & -2 & -7 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Indicar condiciones que debe cumplir el vector $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ para que el sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{Y}$ sea compatible.

Solución. Debe cumplirse que $2a - b + 2c = 0$. A esa condición se llega o bien haciendo transformaciones elementales en la matriz ampliada para obtener una matriz de rango 2 cuya última fila es $(0, 0, 0, a + c - \frac{b}{2})$, o también imponiendo que el rango de la matriz ampliada sea igual a 2 que es el rango de la matriz de los coeficientes.

5. Para hacer un plaguicida se necesitan 6 litros del compuesto A; 7 litros del compuesto B y 10 litros del compuesto C. El producto comercial X contiene 1, 2 y 2 partes, respectivamente, de estos compuestos. El producto comercial Y contiene 1, 1 y 2 partes, y el producto comercial Z contiene dichos compuestos en partes iguales. ¿Qué cantidad de cada tipo de producto comercial se necesita para obtener la mezcla deseada?

Solución. Sean x , y , z los litros que usaremos de X, Y y Z respectivamente. Debe cumplirse que:

$$\begin{cases} \frac{1}{5}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{3}z = 6 \\ \frac{2}{5}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{3}z = 7 \\ \frac{2}{5}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = 10 \end{cases}$$

Este es un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas cuya solución única es $x = 5$, $y = 12$, $z = 6$.

6. Calcula una parábola cuya gráfica pasa por los puntos $(2, 0)$, $(3, 0)$ y $(-1, 12)$.

Solución. La ecuación de una parábola es del tipo $y = ax^2 + bx + c$. Hay que imponer que la gráfica de dicha parábola pase por los puntos $(2, 0)$, $(3, 0)$ y $(-1, 12)$, lo que da lugar a un SEL cuya solución única es $a = 1, b = -5, c = 6$.

7. Calcula a, b, c y d de forma que para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, se verifique la igualdad

$$\frac{x^3 - 7x^2 + 9x - 1}{(x - 1)^2(x^2 + 1)} = \frac{a}{(x - 1)^2} + \frac{b}{x - 1} + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$$

Solución. Se multiplica la igualdad por $(x - 1)^2(x^2 + 1)$, se hacen los productos indicados y se obtiene a la derecha un polinomio de grado 3 cuyos coeficientes dependen de a, b, c, d . Se identifica dicho polinomio con $x^3 - 7x^2 + 9x - 1$ igualando los coeficientes de las respectivas potencias de x , con ello se obtiene un SEL de 4 ecuaciones con 4 incógnitas a, b, c, d que, escrito en forma vectorial, es

$$(a - b + d, b + c - 2d, a - b - 2c + d, b + c) = (-1, 9, -7, 1)$$

cuya solución única es $a = 1, b = -2, c = 3, d = -4$.

8. Las tres cifras de un número suman 21. Si a ese número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras se obtiene 198. Además, la cifra de las decenas es igual a la media aritmética de las otras dos. Calcula dicho número.

Solución. Si el número es abc , la información que dan conduce al sistema

$$(a + b + c, 100a + 10b + c - 100c - 10b - a, b) = (21, 198, \frac{a + c}{2})$$

Se trata del número 876.

9. Discutir y resolver, cuando sea posible, los siguientes sistemas, según los valores de los parámetros a , b .

$$\begin{cases} 2x + ay - z = 0 \\ x - ay = 3 \\ 2ax + y - z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -x + ay - z = 2 \\ x + y - az = 3a + 1 \\ ax - y - z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

Solución. El determinante de la matriz de los coeficientes del primer sistema es $-1 + 3a - 2a^2$. Por tanto, si $-1 + 3a - 2a^2 \neq 0$, el sistema es compatible determinado y sus soluciones se calculan fácilmente por la regla de Cramer. Si $-1 + 3a - 2a^2 = 0$, es decir, $a = 1$ o $a = 1/2$, entonces la matriz ampliada tiene rango 3 y el sistema es incompatible.

El determinante de la matriz de los coeficientes del segundo sistema es $2 + 3a - a^3$. Por tanto, si $2 + 3a - a^3 \neq 0$, el sistema es compatible determinado y sus soluciones se calculan fácilmente por la regla de Cramer. Si $2 + 3a - a^3 = 0$, entonces $a = -1$ o $a = 2$. Para $a = -1$ el sistema se reduce a una sola ecuación $x + y + z = -2$ y es un sistema compatible indeterminado con dos variables libres y , z , que pueden tomar cualquier valor, cuya solución es $x = -2 - y - z$. Para $a = 2$ la matriz ampliada tiene rango 3 y el sistema es incompatible.

El determinante de la matriz de los coeficientes del tercer sistema es $b(a^3 - 3a + 2)$. Por tanto, si $b(a^3 - 3a + 2) \neq 0$, el sistema es compatible determinado y sus soluciones se calculan fácilmente por la regla de Cramer.

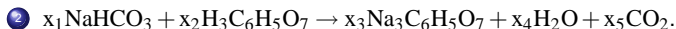
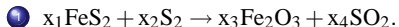
Si $b = 0$ y $a \neq 1$ el rango de la matriz ampliada es 3 y el sistema es incompatible. Si $b = 0$ y $a = 1$ el sistema se reduce a dos ecuaciones $x + z = 1$ y $x + z = 0$, por lo que es claramente incompatible (el rango de la matriz de los coeficientes es 1 y el de la matriz ampliada es 2). En cualquier caso, si $b = 0$ el sistema es incompatible.

En lo que sigue consideramos que $b \neq 0$ pero $b(a^3 - 3a + 2) = 0$. Las soluciones de $a^3 - 3a + 2 = 0$ son $a = 1$ y $a = -2$.

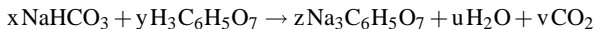
Si $a = 1$ el rango de la matriz de los coeficientes es 1, y, si $b \neq 1$, el rango de la matriz ampliada es 2, luego el sistema es incompatible. Si $a = 1$ y $b = 1$ el sistema se reduce a una ecuación $x + y + z = 1$ y es compatible indeterminado.

Si $a = -2$, el rango de la matriz ampliada es 3 si $b \neq -2$ y el sistema es incompatible; si $b = -2$ el rango de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada es 2 y el sistema es compatible indeterminado, cuyas soluciones vienen dadas en función de la variable libre z .

10. Calcula los coeficientes de las siguientes reacciones químicas para que el número de átomos de cada elemento antes y después de la reacción sea el mismo.



Solución. Planteamos la segunda reacción, la otra es parecida. Se trata de encontrar números enteros positivos x, y, z, u, v tales que escribiendo



los átomos de cada elemento antes y después de la reacción sean los mismos. Resulta así, igualando átomos de sodio, hidrógeno, carbono y oxígeno, en ese orden, el siguiente SEL que, por comodidad, represento en forma vectorial:

$$(x, x + 8y, x + 6y, 3x + 7y) = (3z, 5z + 2u, 6z + v, 7z + u + 2v)$$

Dicho SEL puede resolverse por el método de Gauss-Jordan. Es un sistema de 4 ecuaciones con 5 incógnitas y la matriz de los coeficientes tiene rango 4 por lo que una variable, v (la que no tiene pivote), queda libre y las demás se expresan en función de ella. La solución es $x = v, y = v/3, z = v/3, u = v$. Como buscamos soluciones enteras positivas, lo natural es hacer $v = 3$ con lo cual $x = 3, y = 1, z = 1, u = 3, v = 3$.

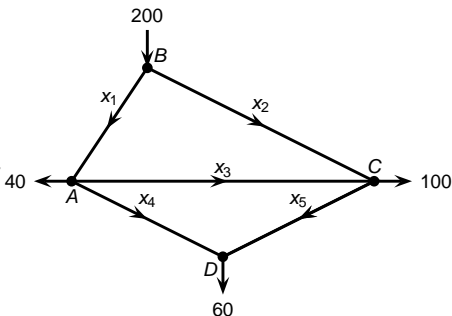
11. Calcula una matriz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$ sabiendo que su producto por los vectores columna $(1, 2, -2)^t$, $(2, 1, -2)^t$, $(-1, 0, 1)^t$ es respectivamente igual a los vectores columna $(3, 1, -3)^t$, $(4, -1, -1)^t$, $(-2, 1, 0)^t$.

Solución. Los datos que nos dan pueden escribirse matricialmente en la forma $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$ donde

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como la matriz \mathbf{B} tiene determinante distinto de cero, es inversible. Basta entonces calcular la matriz inversa \mathbf{B}^{-1} para obtener $\mathbf{A} = \mathbf{CB}^{-1}$.

12. Analiza el flujo de la red de calles que se muestra en la figura (las tasas de flujo se dan en automóviles por minuto). ¿Qué valor mínimo tiene x_1 cuando $x_4 = 0$?



Solución. Observa que el flujo que entra en la red es igual al que sale. Tenemos cuatro ecuaciones, una por cada nodo A, B, C, D . Igualamos en cada caso el flujo entrante al flujo saliente:

$$(x_1, 200, x_2 + x_3, x_4 + x_5) = (x_3 + x_4 + 40, x_1 + x_2, x_5 + 100, 60)$$

La matriz de los coeficientes del sistema es (indico las filas de la matriz):

$$((1, 0, -1, -1, 0), (-1, -1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0, -1), (0, 0, 0, 1, 1))$$

Cuya forma de Hermite es

$$((1, 0, -1, 0, 1), (0, 1, 1, 0, -1), (0, 0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 0, 0))$$

Es, por tanto, una matriz de rango 3 y las variables x_3 y x_5 no tienen pivote. Se trata, por tanto, de un sistema compatible indeterminado cuyas soluciones vienen dadas en función de x_3 y x_5 como sigue:

$x_1 = 100 + x_3 - x_5$, $x_2 = 100 - x_3 + x_5$, $x_4 = 60 - x_5$. Si $x_4 = 0$, entonces $x_5 = 60$ y $x_1 = 40 + x_3$, $x_2 = 160 - x_3$. Como todas las soluciones deben ser mayores o iguales que 0, deducimos que $0 \leq x_3 \leq 160$ y $40 \leq x_1 \leq 200$.

14. Sea **A** una matriz cuadrada de orden n tal que la suma de los elementos de cada fila es cero. Prueba que **A** no es inversible.

Solución. Lo que nos dicen implica que la suma de todas las columnas de **A** es el vector cero. Por tanto, las columnas de **A** son linealmente dependientes y, por las propiedades de los determinantes, concluimos que el determinante de **A** es cero.

También podemos razonar como sigue. Consideremos el SEL homogéneo con n ecuaciones y n incógnitas $\mathbf{Ax}^t = \mathbf{0}$. Dicho SEL admite, como todo SEL homogéneo, la solución trivial $\mathbf{x}^t = \mathbf{0}$. El enunciado del ejercicio nos dice que también admite la solución $(1, 1, \dots, 1)^t$. Luego dicho SEL es compatible indeterminado y, por tanto, el determinante de **A** es cero.

15. Sean \mathbf{A} y \mathbf{B} matrices $m \times n$ tales que $\mathbf{A}\mathbf{x}^t = \mathbf{B}\mathbf{x}^t$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. ¿Qué relación hay entre \mathbf{A} y \mathbf{B} ?

Solución. Sea \mathbf{e}_j^t , $1 \leq j \leq N$, el vector columna $n \times 1$ cuyas componentes son todas nulas excepto la que ocupa la fila i que vale 1. Por la hipótesis hecha, se verificará que $\mathbf{A}\mathbf{e}_j^t = \mathbf{B}\mathbf{e}_j^t$. Y teniendo en cuenta $\mathbf{A}\mathbf{e}_j^t$ es la columna j de la matriz \mathbf{A} y que $\mathbf{B}\mathbf{e}_j^t$ es la columna j de la matriz \mathbf{B} , deducimos que $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.